Kapitola III.
Modely pro regulární jazyky

Regulární výrazy (RV): Definice

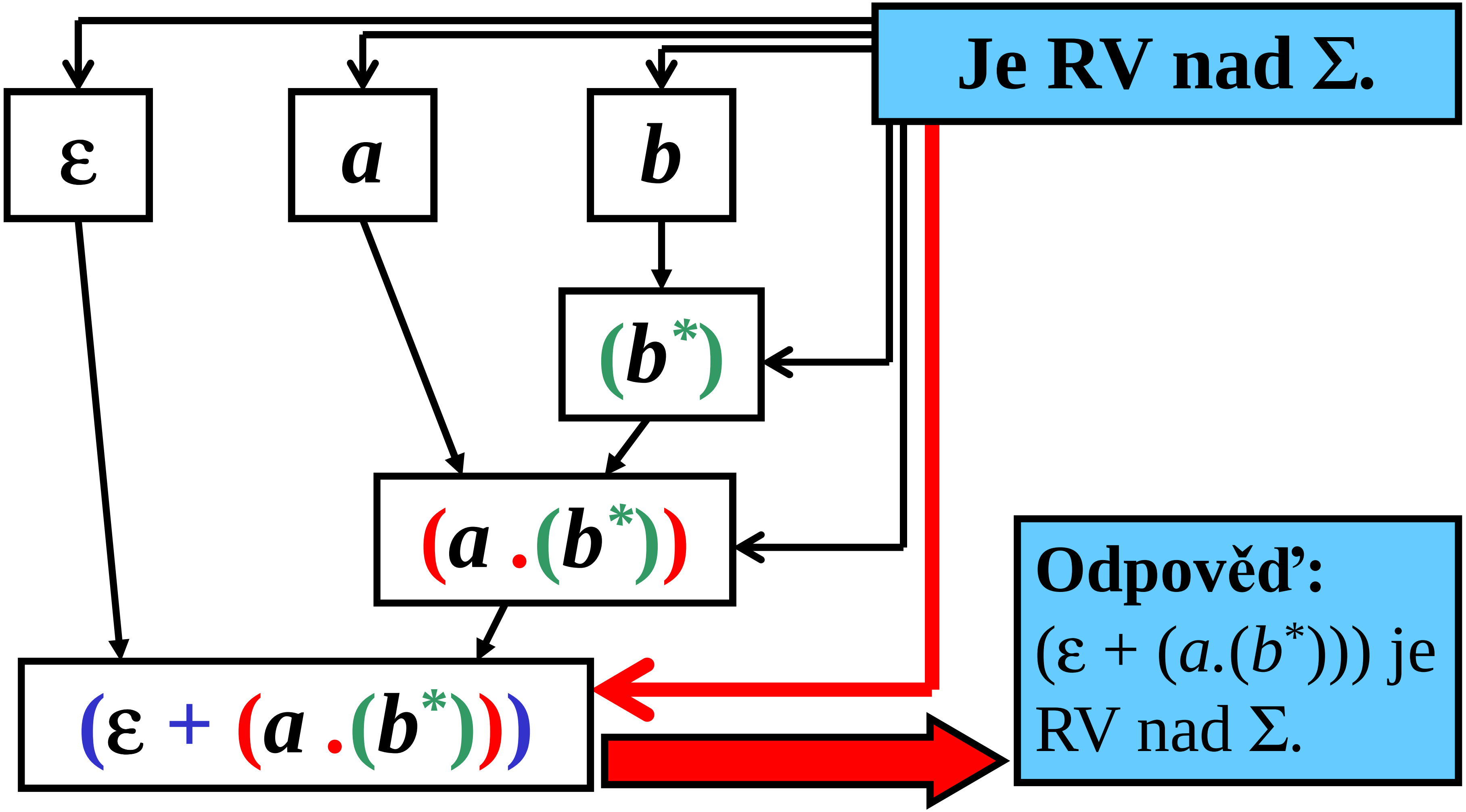
Myšlenka: Jsou to výrazy s operátory ., + a *, které značí v tomto pořadí konkatenaci, sjednocení a iteraci

Definice: Nechť Σ je abeceda. ***Regulární výrazy*** nad abecedou Σ a ***jazyky***, které ***značí***, jsou definovány následovně:

- ∅ je RV značící prázdnou množinu (prázdný jazyk)
- ε je RV značící jazyk {ε}
- *a*, kde $a \in \Sigma$, je RV značící jazyk {*a*}
- Nechť *r* a *s* jsou regulární výrazy značící po řadě jazyky L_r a L_s, potom:
  - $(r.s)$ je RV značící jazyk $L = L_r L_s$
  - $(r + s)$ je RV značící jazyk $L = L_r \cup L_s$
  - (r^*) je RV značící jazyk $L = L_r^*$

Regulární výrazy: Příklad

Otázka: Je $(\varepsilon + (a.(b^*)))$ regulární výraz nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ **?**



Zjednodušení RV

1) Redukce závorek zavedením priorit operátorů:

Priority: $^* > . > +$

2) RV $r.s$ může být zapsán jako rs

3) RV rr^* nebo r^*r může být zapsán jako r^+

Příklad:

$((\boldsymbol{a}.(\boldsymbol{a}^*))+((\boldsymbol{b}^*).\boldsymbol{b}))$ může být zapsán $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{a}^* + \boldsymbol{b}^*.\boldsymbol{b}$,

a $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{a}^* + \boldsymbol{b}^*.\boldsymbol{b}$ může být zapsán $\boldsymbol{a}^+ + \boldsymbol{b}^+$

Regulární jazyk (RJ)

Myšlenka: Každý RV značí regulární jazyk

Definice: Nechť L je jazyk. L je *regulární jazyk* (RJ), pokud existuje regulární výraz r, který tento jazyk značí.

Konvence: $L(r)$ označuje jazyk, který značí RV r.

Příklady:

$r_1 = ab + ba$ značí $L_1 = \{ab, ba\}$

$r_2 = a^+b^*$ značí $L_2 = \{a^nb^m: n \geq 1, m \geq 0\}$

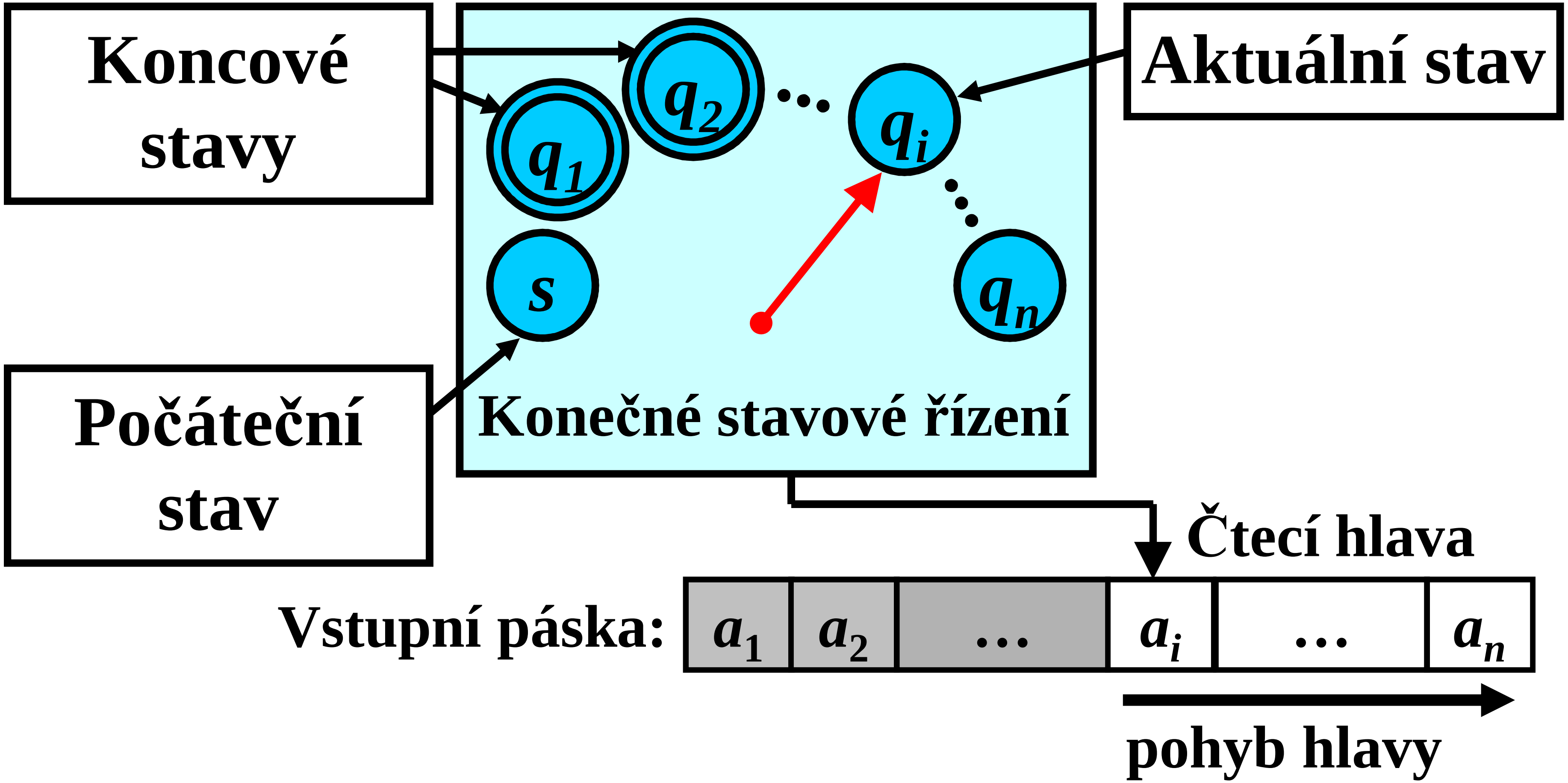
$r_3 = ab(a + b)^*$ značí $L_3 = \{x: ab$ je prefix $x\}$

$r_4 = (a + b)^*ab(a + b)^*$ značí $L_4 = \{x: ab$ je podřetězec $x\}$

L_1, L_2, L_3 , L_4 jsou regulární jazyky nad Σ

Konečné automaty (KA)

Myšlenka: Nejjednodušší model založený na konečné množině stavů a výpočetních pravidel.



Konečné automaty: Definice

Definice: *Konečný automat* (KA) je pětice:

$$M = (Q, \Sigma, R, s, F), \text{ kde}$$

- Q je *konečná množina stavů*
- Σ je *vstupní abeceda*
- R je *konečná množina pravidel* tvaru: $pa \rightarrow q$, kde $p, q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$
- $s \in Q$ je *počáteční stav*
- $F \subseteq Q$ je množina *koncových stavů*

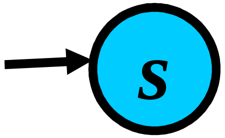
Matematická poznámka k pravidlům:

- Čistě matematicky, R je relace z $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\})$ do Q
- Místo relačního zápisu $(pa, q) \in R$, zapisujeme: $pa \rightarrow q \in R$

- $pa \rightarrow q$ znamená, že při přečtení a M udělá přechod z p do q
- pokud $a = \varepsilon$, není ze vstupní pásky přečten symbol

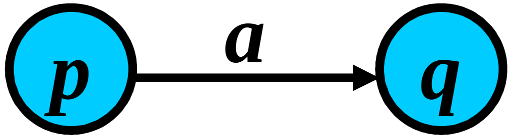
Grafická reprezentace

označuje stav $q \in Q$



označuje počáteční stav $s \in Q$

označuje koncový stav $f \in F$

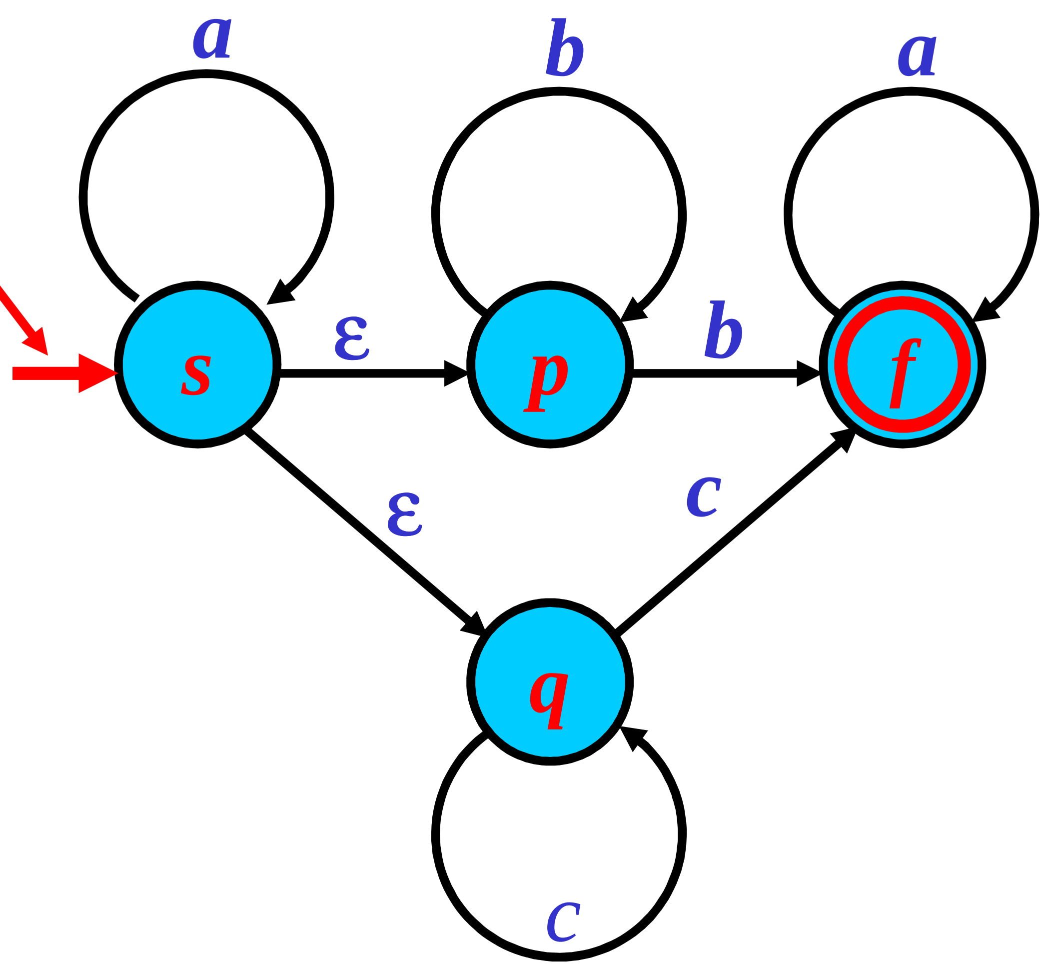


označuje pravidlo $pa \to q \in R$

Grafická reprezentace: Příklad

$M = (Q, \Sigma, R, s, F)$, kde:

- $Q = \{s, p, q, f\}$;
- $\Sigma = \{a, b, c\}$;
- $R = \{sa \rightarrow s,$
  $s \rightarrow p,$
  $pb \rightarrow p,$
  $pb \rightarrow f,$
  $s \rightarrow q,$
  $qc \rightarrow q,$
  $qc \rightarrow f,$
  $fa \rightarrow f\}$;
- $F = \{f\}$



Tabulková reprezentace

- **Sloupce:** Prvky z $\Sigma \cup \{\varepsilon\}$
- **Řádky:** Stavy z Q
- **První řádek:** Počáteční stav
- **Podtržené:** Koncové stavy

	...	a	...	ε
s				
...				
p		$t(p, a)$		
...				
$\underline{f}$				

$t(p, a) = \{q: pa \rightarrow q \in R\}$

Tabulková reprezentace: Příklad

$M = (Q, \Sigma, R, s, F)$,
kde:

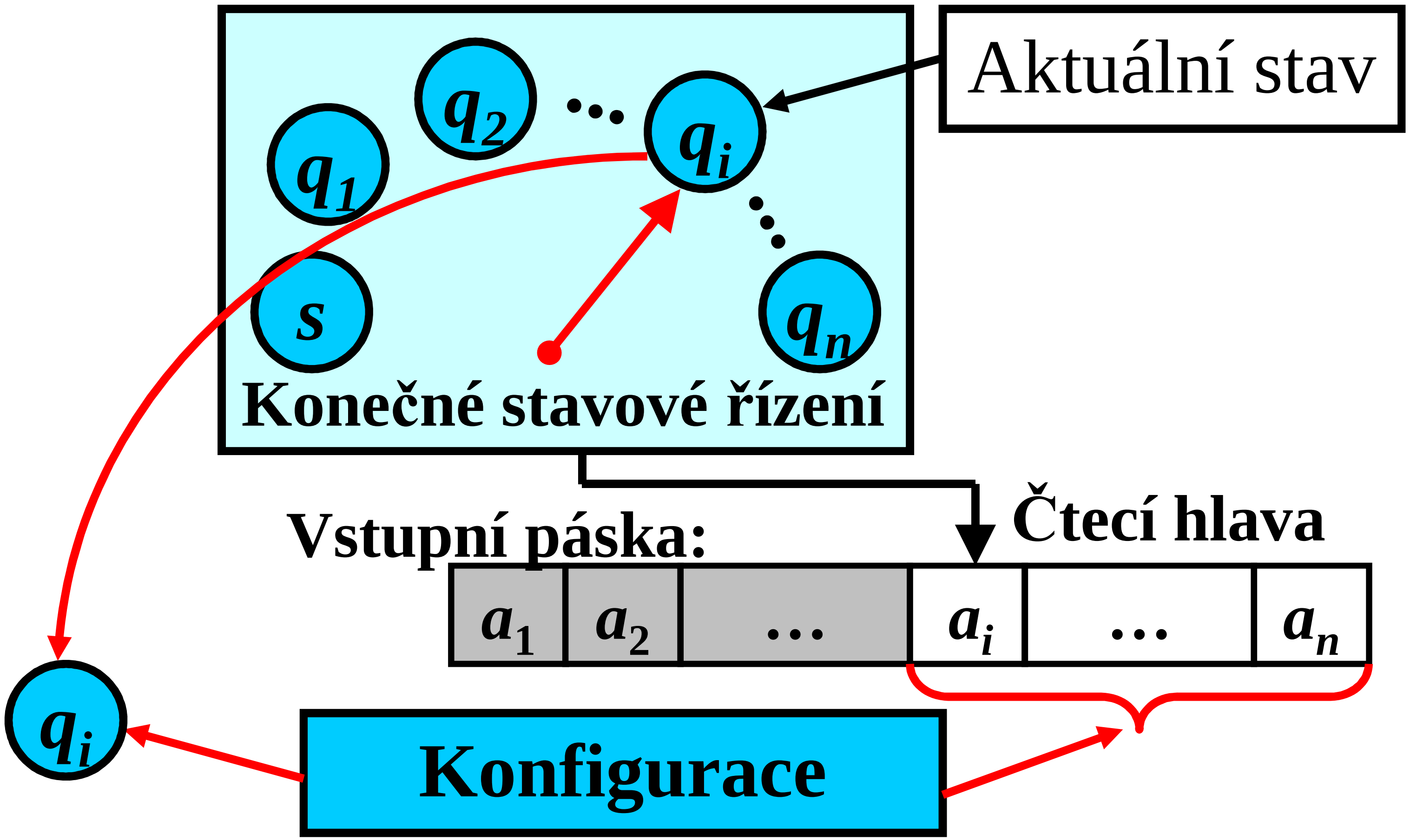
- $Q = \{s, p, q, f\}$;
- $\Sigma = \{a, b, c\}$;
- $R = \{sa \rightarrow s,$
  $s \rightarrow p,$
  $pb \rightarrow p,$
  $pb \rightarrow f,$
  $s \rightarrow q,$
  $qc \rightarrow q,$
  $qc \rightarrow f,$
  $fa \rightarrow f\}$;
- $F = \{f\}$

	a	b	c	ε
s	$\{s\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{p, q\}$
p	$\emptyset$	$\{p, f\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q, f\}$	$\emptyset$
$\underline{f}$	$\{f\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Konfigurace

Myšlenka: Instance popisu KA

Definice: Nechť $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$ je KA.
Konfigurace KA M je řetězec $\chi \in Q\Sigma^*$



Přechod

Myšlenka: Jeden výpočetní krok KA

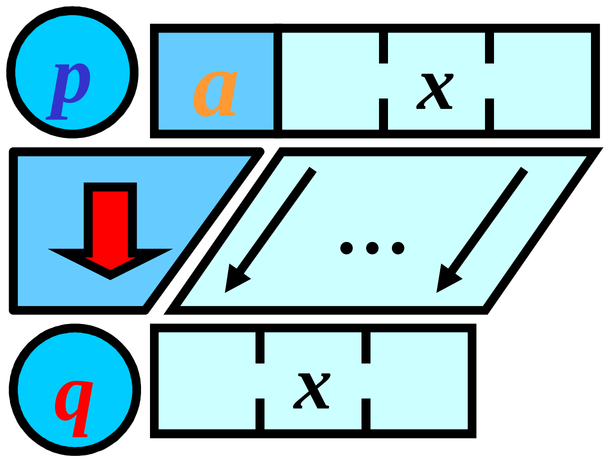
Definice: Nechť pax a qx jsou dvě konfigurace KA M, kde $p, q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ a $x \in \Sigma^*$. Nechť $r = pa \rightarrow q \in R$ je pravidlo. Potom M může provést *přechod* z pax do qx za použití r, zapsáno $pax \vdash qx\ [r]$ nebo zjednodušeně $pax \vdash qx$

Pozn.: pokud $a = \varepsilon$, není ze vstupní pásky přečten symbol

Konfigurace:

Pravidlo: $pa \rightarrow q$

Nová konfigurace:



Sekvence přechodů 1/2

Myšlenka: několik výpočetních kroků po sobě

Definice: Nechť χ je konfigurace. *M* provede *nula přechodů* z χ do χ; zapisujeme:

$$\chi \vdash^0 \chi\ [\varepsilon] \text{ nebo zjednodušeně } \chi \vdash^0 \chi$$

Definice: Nechť $\chi_0, \chi_1, ..., \chi_n$ je sekvence přechodů konfigurací pro $n \geq 1$ a $\chi_{i-1} \vdash \chi_i\ [r_i]$, $r_i \in R$ pro všechna $i = 1, ..., n$, což znamená:

$$\chi_0 \vdash \chi_1\ [r_1] \vdash \chi_2\ [r_2] \dots \vdash \chi_n\ [r_n]$$

Pak *M* provede *n-přechodů* z χ_0 do χ_n; zapisujeme:

$$\chi_0 \vdash^n \chi_n\ [r_1 ... r_n] \text{ nebo zjednodušeně } \chi_0 \vdash^n \chi_n$$

Sekvence přechodů 2/2

Pokud $\chi_0 \vdash^n \chi_n$ [ρ] pro nějaké $n \geq 1$, pak

$$\chi_0 \vdash^+ \chi_n \,[\rho].$$

Pokud $\chi_0 \vdash^n \chi_n$ [ρ] pro nějaké $n \geq 0$, pak

$$\chi_0 \vdash^* \chi_n \,[\rho].$$

Příklad: Uvažujme

$\boldsymbol{p}\boldsymbol{a}bc \vdash \boldsymbol{q}bc$ [**1**: $\boldsymbol{pa} \rightarrow \boldsymbol{q}$] a $\boldsymbol{q}\boldsymbol{b}c \vdash \boldsymbol{r}c$ [**2**: $\boldsymbol{qb} \rightarrow \boldsymbol{r}$].

Potom: $\boldsymbol{pab}c \vdash^2 \boldsymbol{r}c$ [**1 2**],

$\boldsymbol{pab}c \vdash^+ \boldsymbol{r}c$ [**1 2**],

$\boldsymbol{pab}c \vdash^* \boldsymbol{r}c$ [**1 2**]

Přijímaný jazyk

Myšlenka: *M* přijímá řetězec *w*, pokud je celý přečten pomocí sekvencí přechodů a skončí v nějakém koncovém stavu

Definice: Nechť $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$ je KA. *Jazyk přijímaný* konečným automatem M, $L(M)$, je definován:

$$L(M) = \{w: w \in \Sigma^*, sw \vdash^* f, f \in F\}$$

$M = (Q, \Sigma, R, s, F)$:

pokud $q_n \in F$, pak $w \in L(M)$;
jinak $w \notin L(M)$

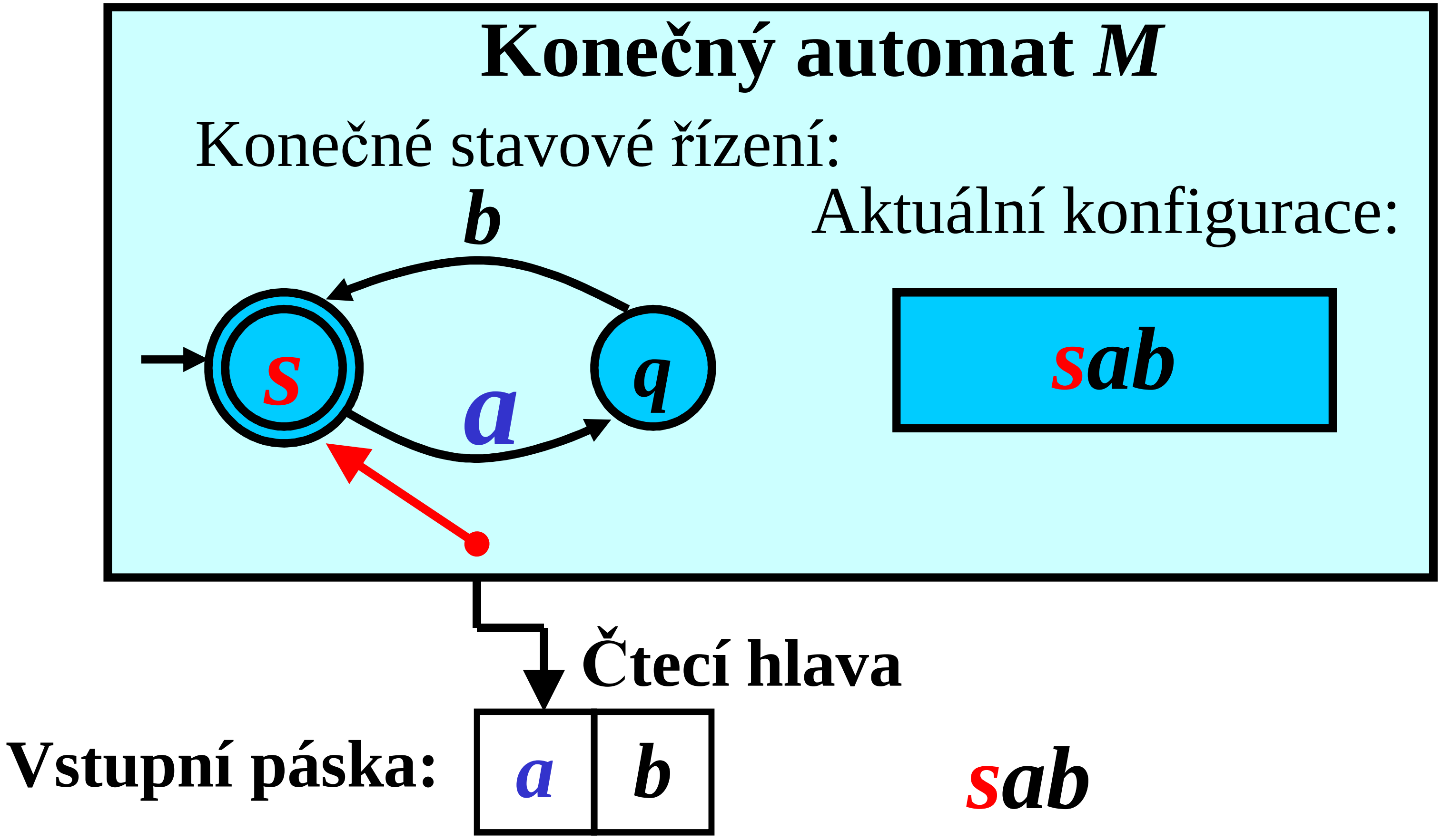
$$s\underbrace{a_1a_2\ldots a_n}_{w} \vdash q_1a_2\ldots a_n \vdash \ldots \vdash q_{n-1}a_n \vdash q_n$$

Konečný automat: Příklad 1/3

$M = (Q, \Sigma, R, s, F)$, kde:

$Q = \{s, q\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $R = \{sa \rightarrow q, qb \rightarrow s\}$, $F = \{s\}$

Otázka: $ab \in L(M)$ **?**

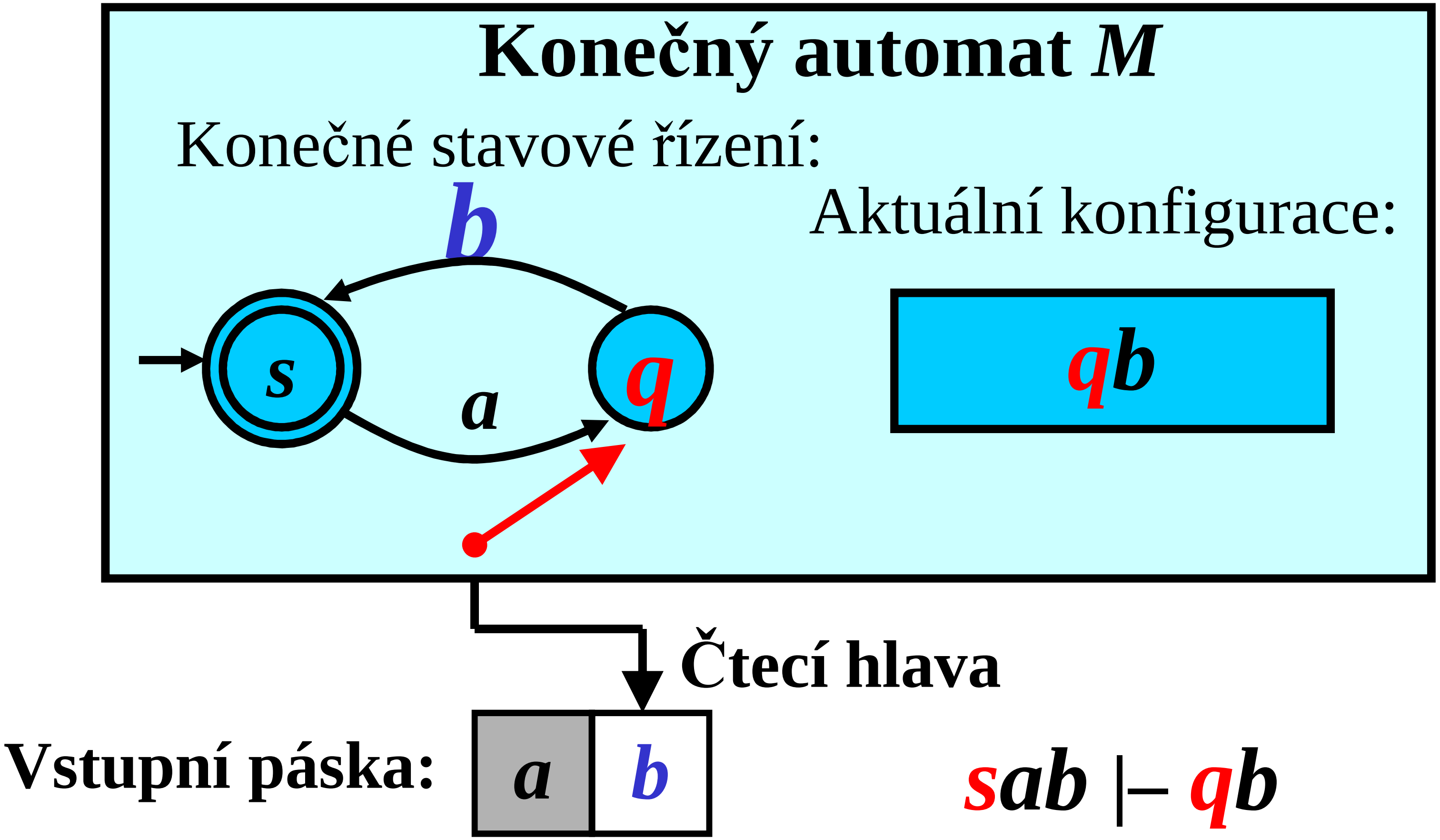


Konečný automat: Příklad 2/3

$M = (Q, \Sigma, R, s, F)$, kde:

$Q = \{s, q\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $R = \{sa \rightarrow q, qb \rightarrow s\}$, $F = \{s\}$

Otázka: $ab \in L(M)$ **?**



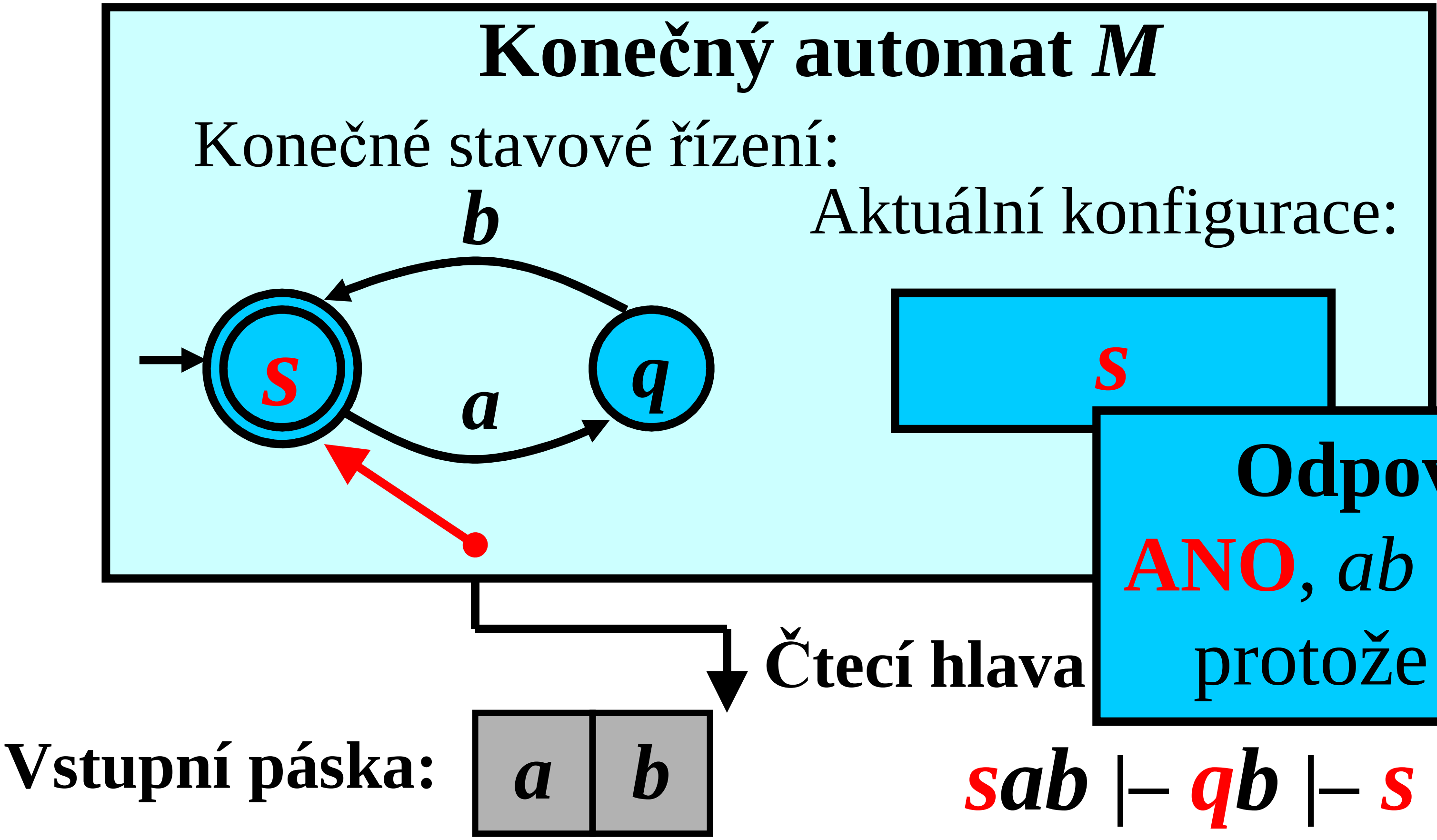
$sab \vdash qb$

Konečný automat: Příklad 3/3

$M = (Q, \Sigma, R, s, F)$, kde:

$Q = \{s, q\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $R = \{sa \rightarrow q, qb \rightarrow s\}$, $F = \{s\}$

Otázka: $ab \in L(M)$ **?**



Odpověď:

ANO, $ab \in L(M)$, protože $s \in F$

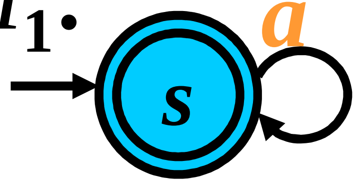
$sab \vdash qb \vdash s$

Ekvivalentní modely

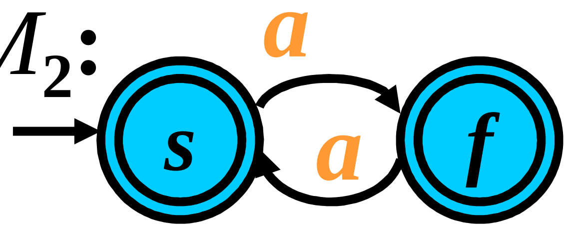
Definice: Dva modely pro popis formálních jazyků (např. konečné automaty) jsou ekvivalentní, pokud specifikují tentýž jazyk.

Příklad:

M_1:



M_2:



Otázka: Je M_1 ekvivalentní s M_2 ?

Odpověď: M_1 a M_2 **jsou ekvivalentní**, protože

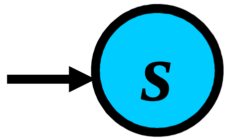
$$\boldsymbol{L(M_1) = L(M_2) = \{a^n : n \geq 0\}}$$

Převod z RV na KA: Základy 1/5

Myšlenka: Algoritmus, který převede libovolný RV na ekvivalentní KA

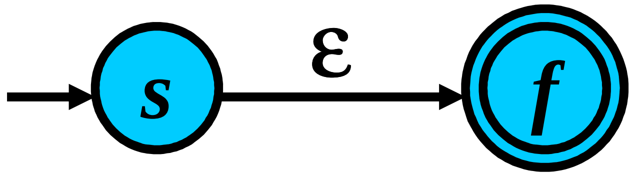
- Pro RV $r = \emptyset$ existuje ekvivalentní KA $M_{\emptyset}$.

Důkaz: $M_{\emptyset}$:



- Pro RV $r = \varepsilon$ existuje ekvivalentní KA M_{ε} .

Důkaz: M_{ε} :



- Pro RV $r = a$, $a \in \Sigma$ existuje ekvivalentní KA M_{a} .

Důkaz: M_{a} :

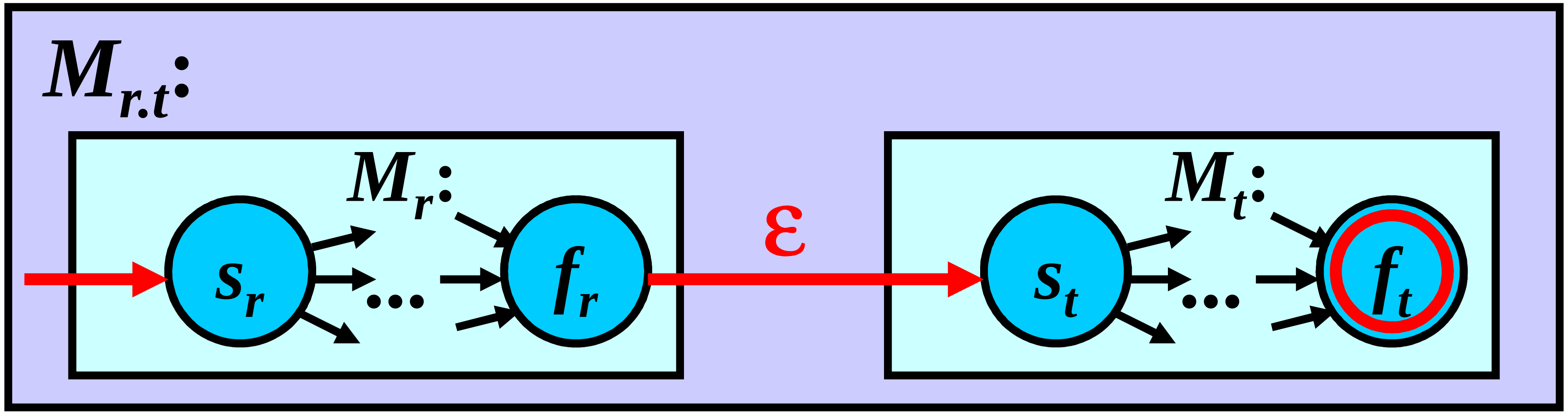
Převod z RV na KA: Konkatenace 2/5

- Nechť $\boldsymbol{r}$ je RV nad Σ a $\boldsymbol{M_r} = (Q_r, \Sigma, R_r, s_r, \{f_r\})$ je KA pro který platí $L(M_r) = L(r)$.
- Nechť $\boldsymbol{t}$ je RV nad Σ a $\boldsymbol{M_t} = (Q_t, \Sigma, R_t, s_t, \{f_t\})$ je KA pro který platí $L(M_t) = L(t)$.
- Potom pro RV $\boldsymbol{r.t}$ existuje ekvivalentní KA $\boldsymbol{M_{r.t}}$

Důkaz: Nechť $Q_r \cap Q_t = \emptyset$.

Popis konstrukce:

$$M_{r.t} = (Q_r \cup Q_t, \Sigma, R_r \cup R_t \cup \{f_r \rightarrow s_t\}, s_r, \{f_t\})$$



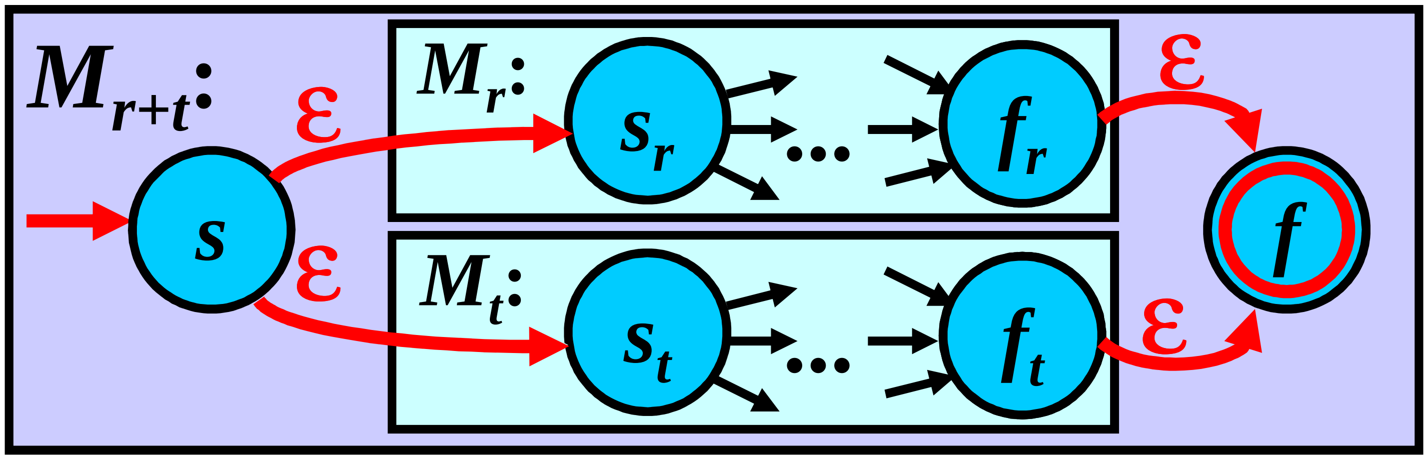
Převod z RV na KA: Sjednocení 3/5

- Nechť $\boldsymbol{r}$ je RV nad Σ a $\boldsymbol{M_r} = (Q_r, \Sigma, R_r, s_r, \{f_r\})$ je KA pro který platí $L(M_r) = L(r)$.
- Nechť $\boldsymbol{t}$ je RV nad Σ a $\boldsymbol{M_t} = (Q_t, \Sigma, R_t, s_t, \{f_t\})$ je KA pro který platí $L(M_t) = L(t)$.
- Potom pro RV $\boldsymbol{r + t}$ existuje ekvivalentní KA $\boldsymbol{M_{r+t}}$

Důkaz: Nechť $Q_r \cap Q_t = \emptyset$; $s, f \notin Q_r \cup Q_t$.

Popis konstrukce:

$$M_{r+t} = (Q_r \cup Q_t \cup \{s, f\}, \Sigma, R_r \cup R_t \cup \{s \to s_r, s \to s_t, f_r \to f, f_t \to f\}, s, \{f\})$$



Převod z RV na KA: Iterace 4/5

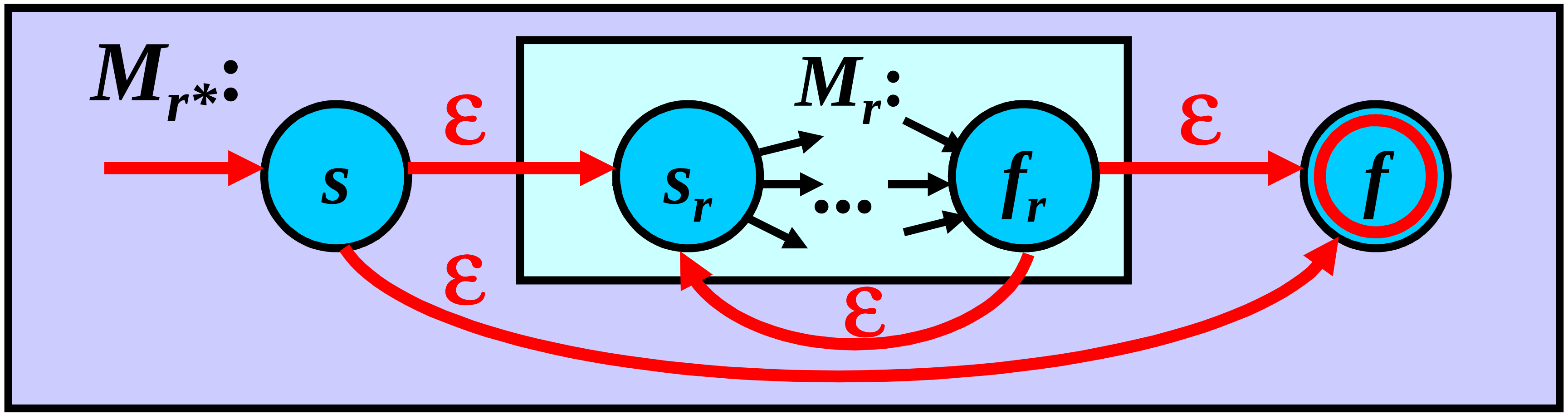
• Nechť r je RV nad Σ a $M_r = (Q_r, \Sigma, R_r, s_r, \{f_r\})$ je KA pro který platí $L(M_r) = L(r)$.

• Potom pro RV r^* existuje ekvivalentní KA M_{r^*}

Důkaz: Nechť $s, f \notin Q_r$.

Popis konstrukce:

$$M_{r^*} = (Q_r \cup \{s, f\}, \Sigma, R_r \cup \{s \rightarrow s_r,\ f_r \rightarrow f,\ f_r \rightarrow s_r, s \rightarrow f\}, s, \{f\})$$



Převod z RV na KA: Souhrn 5/5

- **Vstup:** RV r nad Σ
- **Výstup:** KA M, pro který platí: $L(r) = L(M)$

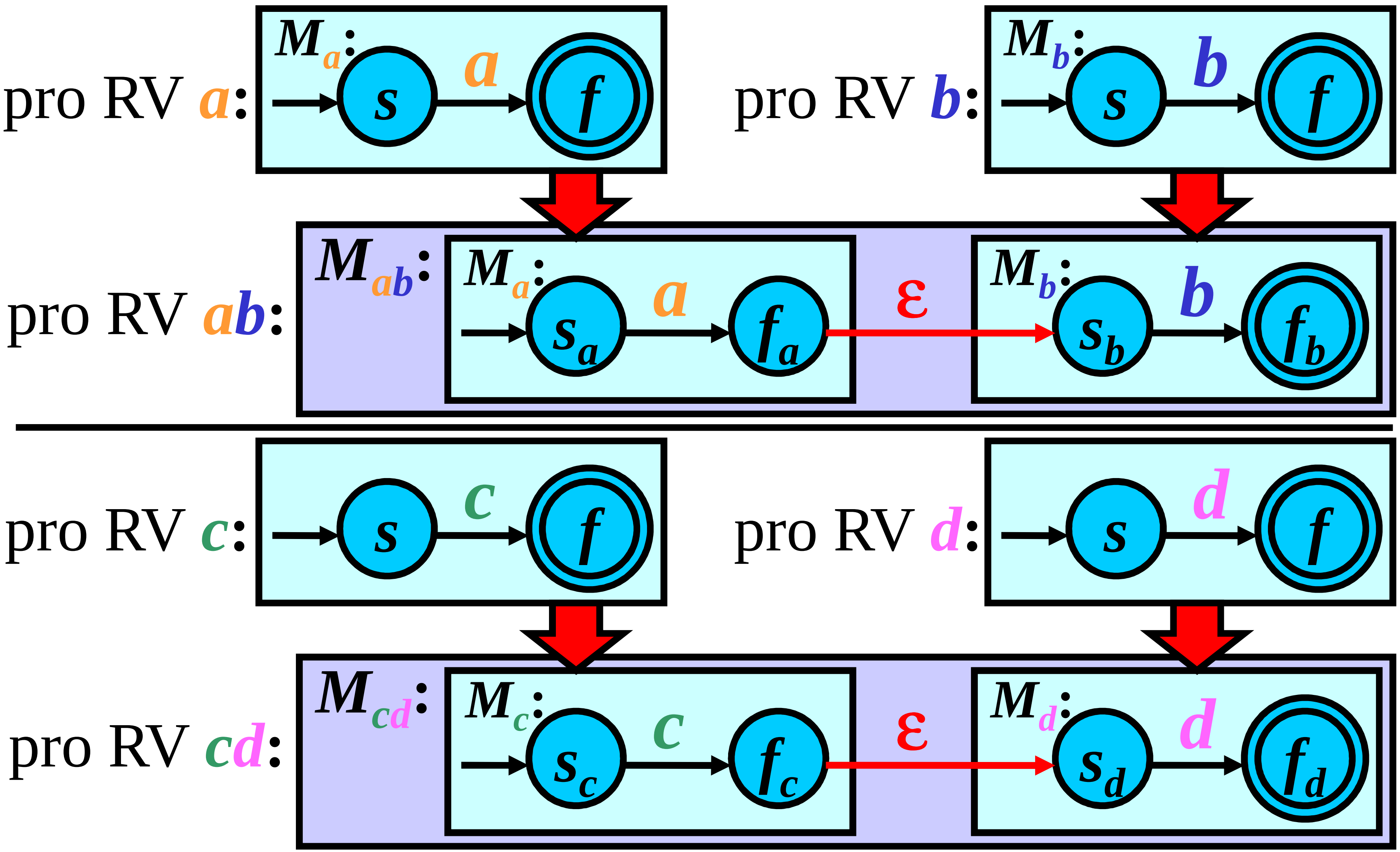
- **Metoda:**
- **"Zevnitř" RV *r* opakovaně použij následující pravidla ke konstrukci konečného automatu *M*:**
  - pro RV $\emptyset$ vytvoř KA $\boldsymbol{M_\emptyset}$
  - pro RV ε vytvoř KA $\boldsymbol{M_\varepsilon}$
  - pro RV $\boldsymbol{a} \in \Sigma$ vytvoř KA $\boldsymbol{M_a}$

  $\rightarrow$ (viz 1/5)
  - **Nechť** pro RV $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{t}$ již existují po řadě KA $\boldsymbol{M_r}$ a $\boldsymbol{M_t}$

    Potom:
    - pro RV $\boldsymbol{r.t}$ vytvoř KA $\boldsymbol{M_{r.t}}$ (viz 2/5)
    - pro RV $\boldsymbol{r + t}$ vytvoř KA $\boldsymbol{M_{r+t}}$ (viz 3/5)
    - pro RV $\boldsymbol{r^*}$ vytvoř KA $\boldsymbol{M_{r^*}}$ (viz 4/5)

Převod z RV na KA: Příklad 1/3

Převeďme RV $r = ((ab) + (cd))^*$ na ekvivalentní KA M

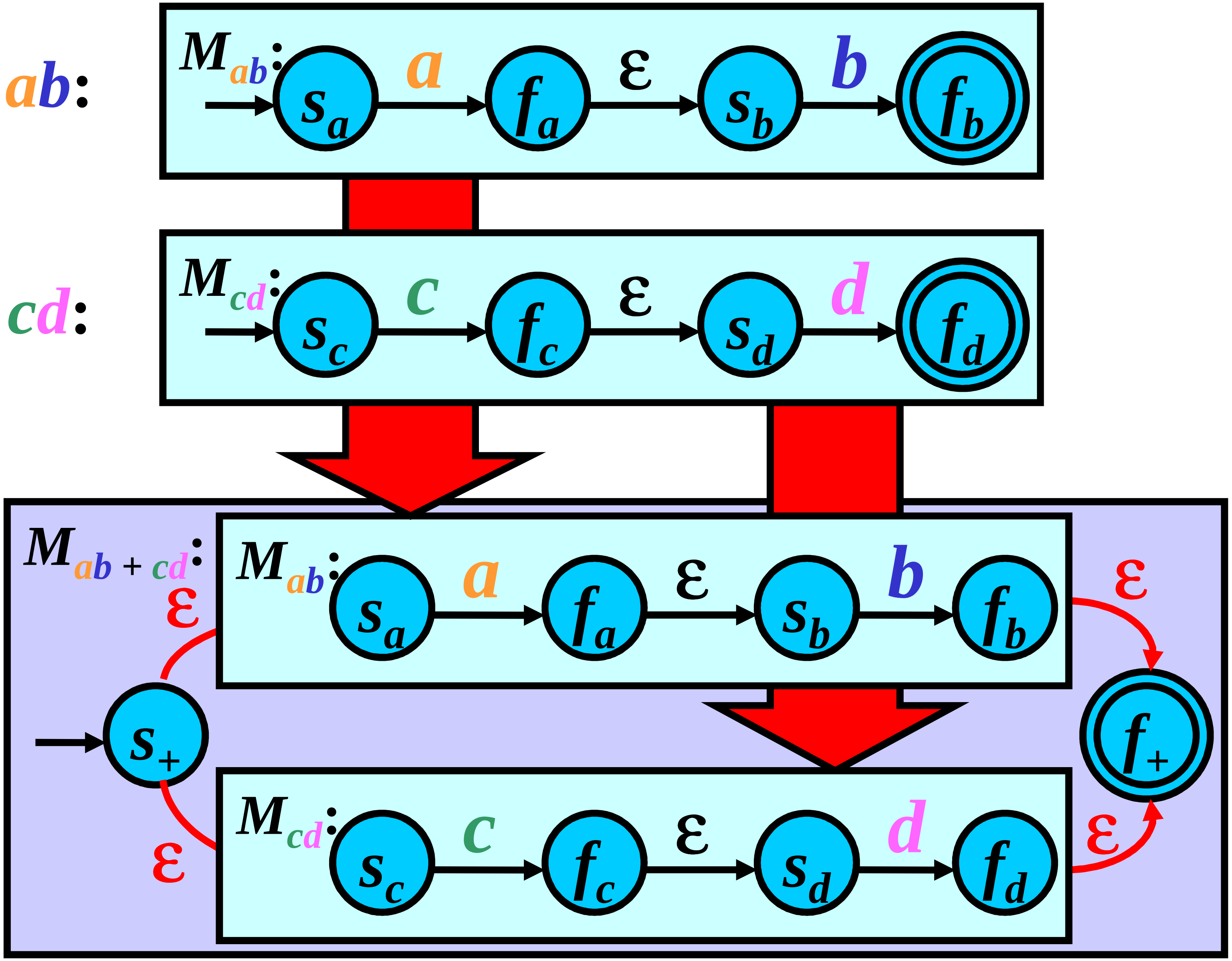


Převod z RV na KA: Příklad 2/3

pro RV *ab*:

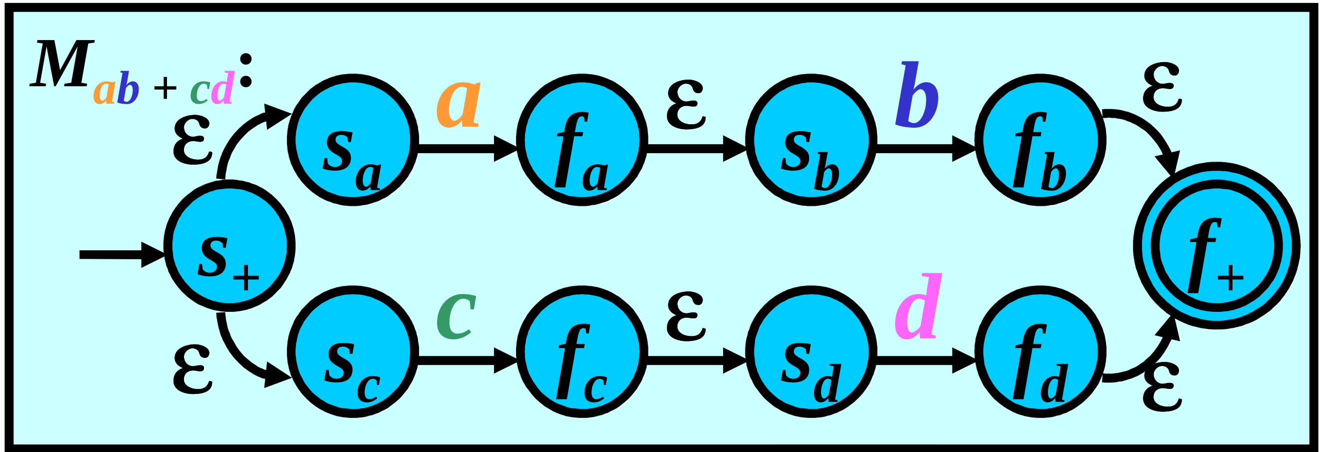
pro RV *cd*:

pro RV *ab* + *cd*:

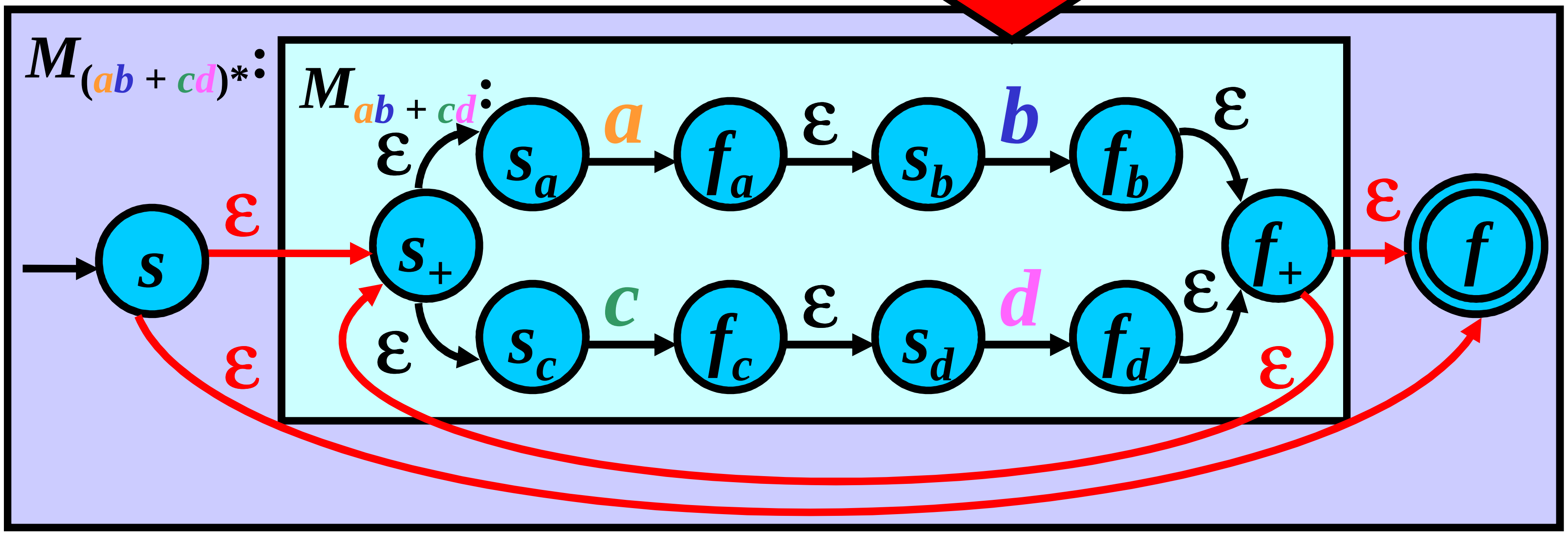


Převod z RV na KA: Příklad 3/3

pro RV
***ab* + *cd*:**



pro výsledný RV **(*ab* + *cd*)*:**



Modely pro regulární jazyky

Tvrzení: Pro každý RV r existuje KA M, pro který platí: $L(r) = L(M)$.

Důkaz je založen na předchozím algoritmu.

Tvrzení: Pro každý KA M existuje RV r, pro který platí $L(M) = L(r)$.

Důkaz: viz str. 210 v knize [Meduna: Automata a Languages]

Závěr: Fundamentální modely pro regulární jazyky jsou:

1) Regulární výrazy **2) Konečné automaty**