

Iterační algoritmy

INP - cvičení 10

Zdeněk Vašíček, Vojtěch Mrázek
2025



Obsah

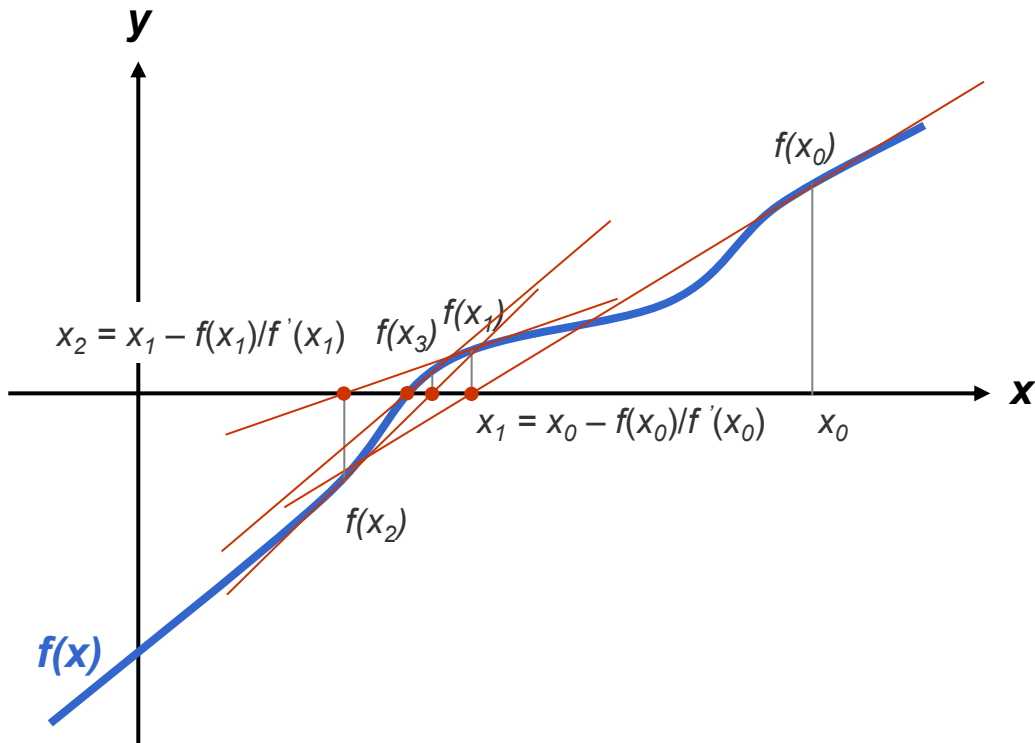
- Newtonův iterační algoritmus
 - dělení, výpočet odmocniny
- Goldschmidtův iterační algoritmus
 - dělení

Newtonova iterační metoda

- Newton–Raphsonova metoda (metoda tečen) je **iterační metoda** určená k nalezení kořenů reálné funkce
- Zpřesnění počátečního odhadu je provedeno na základě znalosti **derivace** zadané funkce (spojitost funkce, monotonní funkce, ...).
- Typické použití:
 - nalezení minima či maxima funkce (pracuje nad $f'(x)$)
 - dělení reálných čísel (využívá se operace násobení)
 - výpočet druhé odmocniny reálných čísel
- Problémy:
 - divergence / pomalá konvergence při nevhodně zvoleném počátečním odhadu
 - nediferencovatelné funkce

Newtonova iterační metoda - princip

Iterativní hledání bodu x_k pro který platí $f(x_k) = 0$ (průsečík funkce $f(x)$ s osou Y)



$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Odvození iteračního vzorce vychází ze znalosti rovnice tečny v bodě (x_0, y_0)

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad f(x_0) = y_0, \quad k = f'(x_0)$$

Newtonova iterační metoda – dělení

Máme-li dělit hodnotu 1 hodnotou b , zvolíme

$$f(x) = 1/x - b$$

Pokud $f(x) = 0$, pak $1/x = b$ a tedy $x = 1/b$

Operaci dělení a/b nahradíme násobením $a * (1/b)$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Odvození iteračního vzorce:

$f'(x) = -1/x^2$, dosazením do $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$ dostaneme

$$x_{i+1} = x_i - (1/x_i - b)/(-1/x_i^2) = x_i + x_i - bx_i^2 = x_i (2 - bx_i)$$

$$x_{i+1} = x_i (2 - bx_i)$$

Postup výpočtu a/b :

1. Zarovnáme (normalizujeme) b tak, aby platilo $1 < b' < 2$, tedy $b' = b \cdot 2^{-k}$
2. Pomocí tabulky odhadů zvolíme první odhad x_0
3. Postupně provádíme výpočty x_{i+1} dokud nedostaneme řešení s požadovanou přesností (viz dále)
4. Výsledek n -té iterace (x_n) vynásobíme číslem a , součin posuneme o odpovídající počet bitů (vynásobíme 2^{-k})

Pomocí Newtonovy iterační metody vypočítejte hodnotu výrazu $1/20$, $x_0 = 1.0$

$$\underline{b} = 20 = 10100_2$$

normalizace b :

$$b = 2^{-4}\underline{b} = 1.0100_2 = 1.25 \text{ (posun desetinné čárky o 4 bity vlevo)}$$

$$x_0 = 1.0$$

$$x_1 = x_0(2 - b \cdot x_0) = 1.000000 (2 - 1.25 \cdot 1.000000) = 0.750000$$

$$x_2 = x_1(2 - b \cdot x_1) = 0.750000 (2 - 1.25 \cdot 0.750000) = 0.796875$$

$$x_3 = x_2(2 - b \cdot x_2) = 0.796875 (2 - 1.25 \cdot 0.796875) = 0.799988$$

$$x_4 = x_3(2 - b \cdot x_3) = 0.799988 (2 - 1.25 \cdot 0.799988) = 0.800000$$

$$x_5 = x_4(2 - b \cdot x_4) = 0.800000 (2 - 1.25 \cdot 0.800000) = 0.800000$$

$$x_6 = x_5(2 - b \cdot x_5) = 0.800000 (2 - 1.25 \cdot 0.800000) = 0.800000$$

$$x_{i+1} = x_i(2 - bx_i)$$

Výsledek po 6 iteračních krocích:

$$1/\underline{b} = 1/20 = 0.800000 \cdot 2^{-4} = 0.05$$

Pomocí Newtonovy iterační metody vypočítejte hodnotu výrazu $1/20$, $x_0 = 0.125$

$$\underline{b} = 20 = 10100_2$$

normalizace b :

$$b = 2^{-4}\underline{b} = 1.0100_2 = 1.25$$

$$x_0 = 0.125$$

$$x_1 = x_0(2 - b \cdot x_0) = 0.125000 (2 - 1.25 \cdot 0.125000) = 0.230469$$

$$x_2 = x_1(2 - b \cdot x_1) = 0.230469 (2 - 1.25 \cdot 0.230469) = 0.394543$$

$$x_3 = x_2(2 - b \cdot x_2) = 0.394543 (2 - 1.25 \cdot 0.394543) = 0.594505$$

$$x_4 = x_3(2 - b \cdot x_3) = 0.594505 (2 - 1.25 \cdot 0.594505) = 0.747215$$

$$x_5 = x_4(2 - b \cdot x_4) = 0.747215 (2 - 1.25 \cdot 0.747215) = 0.796517$$

$$x_6 = x_5(2 - b \cdot x_5) = 0.796517 (2 - 1.25 \cdot 0.796517) = 0.799985$$

$$x_7 = x_6(2 - b \cdot x_6) = 0.799985 (2 - 1.25 \cdot 0.799985) = 0.800000$$

$$x_8 = x_7(2 - b \cdot x_7) = 0.800000 (2 - 1.25 \cdot 0.800000) = 0.800000$$

Výsledek po 8 iteračních krocích:

$$1/\underline{b} = 1/20 = 0.800000 \cdot 2^{-4} = 0.05$$

Hardwarová implementace

- Uvažujte iterační předpis $x_{i+1} = x_i(2 - bx_i)$
- Nakreslete HW implementaci pro zadané x_0 , b a určitý počet iterací
- Jaká je nejdelší cesta?

Přesnost Newtonovy iterační metody - dělení

Příklad:

Ukažte, že se počet správných (přesných) bitů p se každým iteračním krokem zdvojnásobuje

Určení prvního odhadu

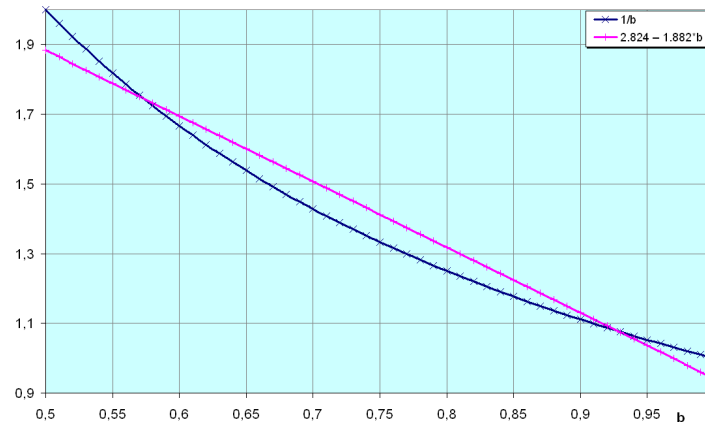
- První odhad je možné určit pomocí lineární aproximace.

$$1/b \sim x_0 = k \cdot b + q$$

- Pokud $0.5 < b < 1$, pak hodnoty $q = 48/17$ a $k = -32/17$ poskytují odhad s minimální maximální absolutní chybou.

$$x_0 = 2.824 - 1.882 \cdot b$$

- V případě použití tohoto odhadu je zaručena kvadratická konvergence.



Pomocí Newtonovy iterační metody vypočítejte hodnotu výrazu $1/20$

$$\underline{b} = 20 = 10100_2$$

normalizace $0.5 < b < 1$:

$$b = \underline{b} \cdot 2^{-5} = 0.10100_2 = 0.625 \text{ (posun des. čárky o 5b vlevo)}$$

určení odhadu x_0 :

$$x_0 = 2.824 - 1.882 \cdot b = 2.824 - 1.882 \cdot 0.625 = 1.64775$$

$$x_1 = x_0(2 - b \cdot x_0) = 1.64775(2 - 0.625 \cdot 1.64775) = 1.59857$$

$$x_2 = x_1(2 - b \cdot x_1) = 1.59857(2 - 0.625 \cdot 1.59857) = 1.60000$$

$$x_3 = x_2(2 - b \cdot x_2) = 1.60000(2 - 0.625 \cdot 1.60000) = 1.60000$$

Výsledek po 3 iteračních krocích:

$$1/\underline{b} = 1/20 = 1.6000 \cdot 2^{-5} = 0.05$$

Pomocí Newtonovy iterační metody vypočítejte hodnotu výrazu $13/8$

$$\underline{b} = 8 = 1000_2$$

normalizace $0.5 < b < 1$:

$$b = \underline{b} \cdot 2^{-4} = 0.1000_2 = 0.5 \text{ (posun des. čárky o 4b vlevo)}$$

určení odhadu x_0 :

$$x_0 = 2.824 - 1.882 \cdot b = 2.824 - 1.882 \cdot 0.5 = 1.88300$$

$$x_1 = x_0(2 - b \cdot x_0) = 1.88300(2 - 0.5 \cdot 1.88300) = 1.99316$$

$$x_2 = x_1(2 - b \cdot x_1) = 1.99316(2 - 0.5 \cdot 1.99316) = 1.99998$$

$$x_3 = x_2(2 - b \cdot x_2) = 1.99998(2 - 0.5 \cdot 1.99998) = 2.00000$$

Výsledek po 3 iteračních krocích:

$$a/\underline{b} = 13/8 = 13 \cdot 2.0000 \cdot 2^{-4} = 1.625$$

Newtonova iterační metoda – odmocnina

Máme-li vypočítat odmocninu čísla S , můžeme zvolit

$$f(x) = x^2 - S$$

Pokud $f(x) = 0$, pak $x^2 = S$ a tedy $x = \sqrt{S}$

Odvození iteračního vzorce:

$f'(x) = 2x$, dosazením do $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$ dostaneme

$$x_{i+1} = x_i - (x_i^2 - S)/2x_i = (x_i^2 + S) / 2x_i$$

$$x_{i+1} = (x_i^2 + S) / 2x_i$$

Předpis odpovídá Babylonskému algoritmu pro výpočet odmocniny (2000 př.n.l.)

Odvozený iterační vzorec však obsahuje operaci dělení proměnnou hodnotou, což je velmi drahá operace.

Newtonova iterační metoda – odmocnina

Efektivnější iterační předpis získáme, zvolíme-li

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - S = x^{-2} - S$$

Pokud $f(x) = 0$, pak $x^{-2} = S$ a tedy $x = \frac{1}{\sqrt{S}}$ (tzv. *reciproká odmocnina*)

Odvození iteračního vzorce:

$f'(x) = -2x^{-3}$, dosazením do $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$ dostaneme

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^{-2} - S}{-2x_i^{-3}} = x_i + \frac{x_i - x_i^3 S}{2} = \frac{3x_i - x_i^3 S}{2}$$

$$x_{i+1} = x_i(3 - x_i^2 S)/2$$

Zjednodušený postup výpočtu $\sqrt{S}$:

1. Zvolíme první odhad x_0
2. Postupně provádíme výpočty x_{i+1} dokud nedostaneme řešení s požadovanou přesností
3. Výsledek n -té iterace (x_n) vynásobíme číslem S , čímž získáme $\sqrt{S}$

Pomocí Newtonovy iterační metody vypočítejte hodnotu výrazu $\sqrt[3]{324}$, $x_0 = 0.01$

$$x_0 = 0.01 \quad (\sqrt{100} = 10 < \sqrt[3]{324} < \sqrt[3]{10000} = 100)$$

$$x_1 = x_0(3 - x_0^2 S)/2 = 0.0100000 (3 - 0.000100000*324)/2 = 0.0148380$$

$$x_2 = x_1(3 - x_1^2 S)/2 = 0.0148380 (3 - 0.000220166*324)/2 = 0.0217278$$

$$x_3 = x_2(3 - x_2^2 S)/2 = 0.0217278 (3 - 0.000472096*324)/2 = 0.0309299$$

$$x_4 = x_3(3 - x_3^2 S)/2 = 0.0309299 (3 - 0.000956661*324)/2 = 0.0416014$$

$$x_5 = x_4(3 - x_4^2 S)/2 = 0.0416014 (3 - 0.001730680*324)/2 = 0.0507383$$

$$x_6 = x_5(3 - x_5^2 S)/2 = 0.0507383 (3 - 0.002574380*324)/2 = 0.0549471$$

$$x_7 = x_6(3 - x_6^2 S)/2 = 0.0549471 (3 - 0.003019190*324)/2 = 0.0555456$$

$$x_8 = x_7(3 - x_7^2 S)/2 = 0.0555456 (3 - 0.003085310*324)/2 = 0.0555556$$

$$x_9 = x_8(3 - x_8^2 S)/2 = 0.0555556 (3 - 0.003086420*324)/2 = 0.0555556$$

Výsledek po 9 iteračních krocích:

$$\sqrt[3]{324} = 324 * 0.0555555 = 18$$

Princip:

- Goldschmidtův algoritmus se snaží nalézt podíl Q rozšiřováním zlomku N/D vhodnými zlomky tak, aby se ve jmenovateli získala hodnota blízká 1.

$$Q = \frac{N}{D} = \frac{N}{D} \frac{R_0}{R_0} \frac{R_1}{R_1} \frac{R_2}{R_2} \frac{R_3}{R_3} \dots \cong \frac{NR_0R_1R_2R_3 \dots}{1}$$

- Po dostatečném počtu iterací je hodnota čitatele blízká hodnotě podílu

Goldschmidtův iterační algoritmus

odvození iteračního předpisu

- Předpokládejme, že platí $1 \leq N, D < 2$ (normalizace N a D)
- Položíme $x_0=N, y_0=D$, náhledem do tabulky odhadneme R_0 tak, aby $y_0 R_0 \rightarrow 1$.
- Pro relativní chybu počátečního odhadu platí

$$\varepsilon = \frac{1 - y_0 R_0}{1} = 1 - y_0 R_0 \quad -1 < \varepsilon < 1$$

- Dále můžeme odvodit

$$y_1 = y_0 R_0 \Rightarrow y_1 = 1 - \varepsilon$$

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_0}{y_0} \frac{R_0}{R_0} = \frac{x_0}{y_0}$$

- Máme vynásobit y_1 tak, abychom se přiblížili k 1, zvolme $R_1=1+\varepsilon$

$$\frac{x_2}{y_2} = \frac{x_1}{y_1} \frac{R_1}{R_1} = \frac{x_1}{1 - \varepsilon} \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon} = \frac{x_1(1 + \varepsilon)}{1 - \varepsilon^2}$$

$$y_2 = 1 - \varepsilon^2$$

$$R_1 = 1 + \varepsilon = 2 - y_1$$

- Máme vynásobit y_2 tak, abychom se přiblížili k 1, zvolme $R_2=1+\varepsilon^2$

$$\frac{x_3}{y_3} = \frac{x_2}{y_2} \frac{R_2}{R_2} = \frac{x_2}{1 - \varepsilon^2} \frac{1 + \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} = \frac{x_2(1 + \varepsilon^2)}{1 - \varepsilon^4}$$

$$y_3 = 1 - \varepsilon^4$$

$$R_2 = 1 + \varepsilon^2 = 2 - y_2$$

Goldschmidtův iterační algoritmus

výpočet $Q=N/D$

Postup výpočtu

- Položíme $x_0=N$, $y_0=D$
- Odhadneme R_0 (např. náhled do tabulky)
- V první iteraci určíme $x_1=x_0R_0$, $y_1=y_0R_0$
- V dalších iteracích ($i = 1, \dots$) násobíme čítec i jmenovatel koeficientem $R_i = 2 - y_i$. Násobením koeficientem R_i provádíme rozšiřování výrazem $1+\varepsilon^{2i}$ (viz odvození).
- Po dostatečném počtu iterací je x_0 rovno podílu.

Odhad R_0

- Dostatečně dobrý odhad R_0 lze získat vyčíslením výrazu

$$R_0 = \operatorname{sgn}(y_0)2^n(2 - \operatorname{sgn}(y_0)2^n y_0)$$

což pro nezáporné číslo v rozsahu $<1,2)$ odpovídá $R_0 = 2 - y_0$

Pomocí Goldschmidtova iteračního algoritmu vypočítejte hodnotu výrazu $3/22$

$$\underline{N} = 3 = 0011_2 \quad \underline{D} = 22 = 10110_2$$

normalizace $1 \leq N, D < 2$:

$$N = \underline{N} \cdot 2^{-1} = 1.1_2 = 1.500$$

$$D = \underline{D} \cdot 2^{-4} = 1.011_2 = 1.375$$

$$R_0 = 2 - y_0 = 2 - 1.375 = 0.625 \quad (\text{prvotní odhad } R_0)$$

$$x_1 = x_0 * R_0 = 1.500 * 0.625 = 0.937500$$

$$y_1 = y_0 * R_0 = 1.375 * 0.625 = 0.859375$$

$$R_1 = 2 - y_1 = 2 - 0.859375 = 1.14063$$

$$x_2 = x_1 * R_1 = 0.937500 * 1.14063 = 1.069340$$

$$y_2 = y_1 * R_1 = 0.859375 * 1.14063 = 0.980225$$

$$R_2 = 2 - y_2 = 2 - 0.980225 = 1.01978$$

$$x_3 = x_2 * R_2 = 1.069340 * 1.01978 = 1.090480$$

$$y_3 = y_2 * R_2 = 0.980225 * 1.01978 = 0.999609$$

$$R_3 = 2 - y_3 = 2 - 0.999609 = 1.00039$$

$$x_4 = x_3 * R_3 = 1.090480 * 1.00039 = 1.09091$$

$$y_4 = y_3 * R_3 = 0.999609 * 1.00039 = 1.00000$$

Úkoly na procvičení

- S využitím Newtonovy iterační metody odvodte iterační vzorec pro výpočet třetí odmocniny.
- Jakou operaci lze realizovat, pokud použijeme Newtonovu iterační metodu a funkci $f(x) = (x-1+1/d)/(x-1)$, určete iterační předpis pro danou funkci.
- Určete počet kroků potřebný k získání hodnoty výrazu $24/16$ použijeme-li Newtonovu iterační metodu a Goldschmidtův algoritmus.